MATEMATIKA OLIMPIA
KÖRZETI SZAKASZ
2013. január 26.

XI. OSZTÁLY

M1- es program

1.) Határozza meg az $a, b, c \in R$ értékét, ha a $\lim_{n\to\infty} n\left(an-\sqrt{n^2+bn+c}\right)$ határérték véges!

2.) Adott a következő sorozat : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: 2,4,1,3,6,8,5,7,10,12,9,11,…

a) Határozza meg a sorozat 2013-adik tagját!

b) Döntse el, hogy 2013 tagja-e a sorozatnak!

3.) Adott a következő egyenlet: $X^2=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}$, $X\in M_2(\mathbb{C})$

a) Oldja meg az egyenletet!

b) Ha $X_{1,2,3,4}$ az egyenlet megoldásai, számítsa ki $X_1^{2013}+X_2^{2013}+X_3^{2013}+X_4^{2013}$ értékét!

4.) Tekintsük az $M = \{A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) / A^3-A=O_3\}$ mátrixhalmazt.

a) Mutassa ki, hogy ha $A\in M$ és $\det A\neq 0$, akkor $A^*\in M$, ahol A^* az adjungált mátrix!

b) Igazolja, hogy az M halmaznak van legalább négy eleme!

c) Bizonyítsa be, hogy ha $A\in M$ és $\det(A-I_3)\neq 0$, akkor $\det(A^2+A+2\cdot I_3)=8$.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.